PART4 高次方程式の解法

要点 ① 高次方程式と因数分解による解法

x の多項式 $P(x)$ を n 次の多項式とするとき，$P(x)=0$ の形で表される方程式を，「　　　　　」という。特に，3 次以上の方程式を「高次方程式」という。

高次方程式 $P(x)=0$ を解くことは容易ではないが，$P(x)$ が 2 次以下の多項式の積に因数分解できれば解くことができる。

例　3 次方程式 $x^3=1$ を解く。

移項して $x^3-1=0$

左辺を因数分解すると　　　　　　　　$=0$

よって　$x-1=0$　または　$x^2+x+1=0$

したがって　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

※ 3 乗して a になる数を，a の「3 乗根」(または「立方根」) という。

a の 3 乗根は，方程式 $x^3=a$ の解である。

x^4-4x^2+3 のように，4 次式のうち，3 次と 1 次の項がないなど，次数がすべて偶数の項の式を，「複 2 次式」という。複 2 次式の因数分解は，$x^2=t$ とおくと，2 次式の因数分解に帰着する。

要点 ② 高次方程式の解法 (因数定理)

ここでは，因数定理を用いて高次方程式を解く。

例　3 次方程式 $x^3-2x^2-5x+6=0$ を解く。

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とすると

$$P(1)=1^3-2\cdot1^2-5\cdot1+6=0$$

より，$P(x)$ は　　　を因数にもつ。

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$

$P(x)=0$ より　$x=1,\ -2,\ 3$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad -x \quad -6 \\ \hline x-1 & x^3-2x^2-5x+6 \\ & x^3-\ \ x^2 \\ \hline & -x^2-5x \\ & -x^2+\ \ x \\ \hline & -6x+6 \\ & -6x+6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

要点 ③ 重解

方程式 $(x-2)^2(x+3)=0$ の解は, $x=2$, -3である。この解 $x=2$ を, この方程式の「　　　」という。また，方程式 $(x-1)^3=0$ の解 $x=1$ を，この方程式の「　　　」という。

2 重解を重なった 2 個の解，3 重解を重なった 3 個の解と考えると，複素数の範囲において，2 次方程式は常に 2 個，3 次方程式は常に 3 個の解をもつ。

一般に，複素数の範囲において，n 次方程式は n 個の解をもつことが知られている。

4 次の方程式を解け。

(1) $x^3+27=0$

(2) $x^4-3x^2-4=0$

(3) $x^3-3x^2-8x-4=0$

(4) $x^3+4x^2-3x-18=0$

Point Pickup

高次方程式 $P(x)=0$ の解法

・因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

・複 2 次式の因数分解は，$x^2=t$ とおくと，2 次式の因数分解に帰着する。

※特に断りがないときは，解は複素数の範囲で答える。

第 4 講 PART4 確認問題

次の方程式を解け。

1 $x^3+1=0$

$$x=\boxed{\text{アイ}},\ \frac{\boxed{\text{ウ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,i}{2}$$

2 $x^4+3x^2-4=0$

$$x=\pm\boxed{\text{オ}},\ \pm\boxed{\text{カ}}\,i$$

3 $x^3-4x^2+3x+2=0$

$$x=\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

4 $x^3+3x^2-9x+5=0$

$$x=\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サシ}}$$

PART4 高次方程式の解法

4 次の方程式を解け。

(1) $x^3+27=0$　　(2) $x^4-3x^2-4=0$

(3) $x^3-3x^2-8x-4=0$　　(4) $x^3+4x^2-3x-18=0$

[解答]

(1) $x^3+27=0$

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

よって　$x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$

(2) $x^2=t$ とおくと $t^2-3t-4=0$

$(t+1)(t-4)=0$　　つまり　$(x^2+1)(x^2-4)=0$

よって，$x^2+1=0$ または $x^2-4=0$

$x^2+1=0$ より，$x^2=-1$　　$x=\pm i$

$x^2-4=0$ より，$x^2=4$　　$x=\pm2$

したがって　$x=\pm2,\ \pm i$

(3) $P(x)=x^3-3x^2-8x-4$ とおくと

$P(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-4=0$

より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$P(x)=(x+1)(x^2-4x-4)$

$P(x)=0$ より，$x+1=0$ または $x^2-4x-4=0$

したがって　$x=-1,\ 2\pm2\sqrt{2}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x-4 \\ \hline
x+1 & x^3-3x^2-8x-4 \\
 & x^3+x^2 \\ \hline
 & -4x^2-8x \\
 & -4x^2-4x \\ \hline
 & -4x-4 \\
 & -4x-4 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

(4)　$P(x)=x^3+4x^2-3x-18$ とおくと

$$P(2)=2^3+4\cdot 2^2-3\cdot 2-18=0$$

より，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x-2)\left(x^2+6x+9\right)=(x-2)(x+3)^2$$

$P(x)=0$ より，$x=2$，-3

$$\begin{array}{r|l} & x^2+6x+9 \\ \hline x-2 & x^3+4x^2-3x-18 \\ & \underline{x^3-2x^2} \\ & 6x^2-3x \\ & \underline{6x^2-12x} \\ & 9x-18 \\ & \underline{9x-18} \\ & 0 \end{array}$$

第 4 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：−1，ウ：1，エ：3

[解説]

$$x^3+1=0$$

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$ [A]

よって，$x+1=0$ または $x^2-x+1=0$

$x+1=0$ より，$x=-1$

$x^2-x+1=0$ より

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$ [B]

したがって

$$\boldsymbol{x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$$

[A]　因数分解を行う。
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

[B]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2

[正解] オ：1，カ：2

[解説]

$x^2=t$ とおくと，与えられた方程式は [C]

$$t^2+3t-4=0$$

$$(t-1)(t+4)=0$$

つまり

$$(x^2-1)(x^2+4)=0$$

よって，$x^2-1=0$ または $x^2+4=0$

$x^2-1=0$ より，$x^2=1$

$$x=\pm1$$

$x^2+4=0$ より，$x^2=-4$

$$x=\pm\sqrt{-4}=\pm2i$$

したがって

$$\boldsymbol{x=\pm1,\ \pm2i}$$

[C]　複 2 次式の因数分解は，$x^2=t$ とおくと，2 次式の因数分解に帰着する。

3 [正解] キ：2，ク：1，ケ：2

[解説]

$P(x)=x^3-4x^2+3x+2$ とおくと

$$P(2)=2^3-4\cdot 2^2+3\cdot 2+2=0$$ [D]

より，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-2$ で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r}
x^2-2x-1 \\
x-2\,\big)\,\overline{x^3-4x^2+3x+2} \\
\underline{x^3-2x^2} \\
-2x^2+3x \\
\underline{-2x^2+4x} \\
-x+2 \\
\underline{-x+2} \\
0
\end{array}$$

よって

$$P(x)=(x-2)(x^2-2x-1)$$

$P(x)=0$ より

$$x-2=0 \text{ または } x^2-2x-1=0$$

$x-2=0$ より，$x=2$

$x^2-2x-1=0$ より

$$x=1\pm\sqrt{2}$$

したがって

$$\boldsymbol{x=2,\ 1\pm\sqrt{2}}$$

[D]　因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

4 [正解] コ：1，サシ：−5

[解説]

$P(x)=x^3+3x^2-9x+5$ とおくと

$$P(1)=1^3+3\cdot1^2-9\cdot1+5=0$$ [E]

より，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-1$ で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+4x-5 \\
x-1 & x^3+3x^2-9x+5 \\
 & x^3-x^2 \\ \hline
 & \quad 4x^2-9x \\
 & \quad 4x^2-4x \\ \hline
 & \qquad -5x+5 \\
 & \qquad -5x+5 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

よって

$$\begin{aligned}
P(x)&=(x-1)(x^2+4x-5)\\
&=(x-1)(x-1)(x+5)\\
&=(x-1)^2(x+5)
\end{aligned}$$

$P(x)=0$ より

$$\boldsymbol{x=1,\ -5}$$ [F]

[E]　因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

[F]　$x=1$ が重解となり，2 個の解と考える。$P(x)=0$ は 3 次方程式なので，3 個の解をもつ。
一般に，複素数の範囲において，n 次方程式は n 個の解をもつ。